**2** Soit $(I_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par: $\begin{cases} I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

**a** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$

Car $\forall u \in [0,1]$

$\Rightarrow 0 \leq u^2 \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq 1+u^2 \leq 2$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+u^2} \leq 1$

par suite car $u^{2n} \geqslant 0$

$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{u^{2n}}{1+u^2} \leqslant u^{2n}$

les fonction $u \mapsto \frac{u^{2n}}{1+u^2}$ et $u \mapsto u^{2n}$

sont continues sur $[0,1]$

$\Rightarrow 0 \leqslant \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^2} du \leqslant \int_0^1 u^{2n} dx$

$\Rightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$

donc $\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+1}}$